Excitation Spectrum of Liquid Helium (II)

AUTHOR(S):

一柳, 正和

CITATION:

一柳, 正和. Excitation Spectrum of Liquid Helium (II). 物性研究 1966, 6(2): 63-71

ISSUE DATE:

1966-05-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/85888

Excitation Spectrum of Liquid Helium (II)

一　柳　正　和（阪大工）

（4月20日受理）

§1. 序　論

前の論文[1] で我々は Drummand-Pines theory[2] に従つて Bose 系の Excitation spectrum を得た。collective modes は $E_k = i\sqrt{\varphi_k}\cdot\rho_k^*$ であり、特に mode-coupling が spectrum をさげる上に重要な役割をはたしていることを示した。

この報告では、field E_k の量子化を論ずる。我々は Bohm-pines theory[3] を Bose 系に応用する。field E_k と density fluctuation ρ_k との関係は適当な正準変換によつて得られる。Bohm-Pines theory と analogous な正準変換は E_k と ρ_k の関係は classical な場合のそれと同型のものであることを示す。このことは我々は excited state として Feynman type のものを考えていることに対応している。fields 間の相互作用は spectrum をさげることが摂動論で示される。(§5) 。fields 間の相互作用を消すような正準変換は excited state が Feynman-Cohen type となることを示す (§6) 。

§2. Hamiltonian

体積V＝1の箱の中にN個の Boson が存在する。粒子は互に weakly interacting である。この系の Hamitonian は

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum \varphi_k \rho_k^* \rho_k \tag{2.1}$$

である。m は粒子の質量、pi は粒子の運動量、φ_k は粒子間の相互作用の Fourier 成分

$$\varphi_k \equiv \int d^3r\,\varphi(r)\,e^{ikr} = \varphi_{-k} \geq 0 \tag{2.2}$$

である。ρ_kはk-th density fluctuation

$$\rho_k = \sum_i e^{-ikx_i} = \rho_{-k}^* \tag{2.3}$$

である。x_i は粒子の位置の vector である。

§3. Collective modes

多体系のcollective modesを取り出す有力な方法はBohm-Pines theory であろう。この方法はTomonaga[4] により相互作用がnonmagnetic origine の系に拡張されている。

collective coordinates の組をHamiltonian (2.1) に附加項を導入することにより構成する。この組を（E_k, Q_k）とする。これらの変数は次の交換関係を満足する。

$$[Q_{k'}\cdot E_k] = i\cdot\delta_{k,k'} \qquad \text{otherwise} = 0 \qquad (k<k_c) \tag{3.1}$$

$$E_k^* = -E_{-k}, \qquad Q_k^* = -Q_{-k} \tag{3.2}$$

これらは粒子の運動量及び座標とは可換である。

Hamiltonian (2.1) に附加する項は

$$H_{add} = \sum_{k<k_c} \frac{1}{2} E_k^* E_k - i\sum_{k<k_c} \sqrt{\varphi_k}\, E_k \rho_k \tag{3.3}$$

であり、ただし系の波動関数は

$$E_k\cdot\Phi = 0 \qquad (k<k_c) \tag{3.4}$$

なる補助条件を満たさなければならない。したがつて系のHamiltonianは

$$\mathcal{H} = \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{k<k_c} \frac{1}{2} E_k^* E_k + \frac{1}{2}\sum \varphi_k \rho_k - i\sum_{k<k_c} \sqrt{\varphi_k}\, E_k \rho_k \tag{3.5}$$

である。

よく知られているようにcanonical transformation

$$\Psi = e^{iS}\,\Phi \tag{3.6}$$

$$S = -\sum_{k<k_c} \sqrt{\varphi_k}\, Q_k \rho_k^* \tag{3.7}$$

はHamiltoniam (3.5) を次のように変換する：

$$\mathscr{H}_{\text{new}}=\Sigma\frac{1}{2m}p_i^2+H_{\text{field}}+\frac{1}{2}\sum_{k>k_c}\varphi_k\rho_k^*\rho_k$$
$$+\sum_{i}\sum_{k>k_c}\frac{k}{m}\sqrt{\varphi_k}\,(p_i-\frac{k}{2})\,Q_k e^{ikx_i}$$
$$+\sum_{\substack{k,q<k_c\\ q\neq 0}}\frac{k(k-q)}{2m}\sqrt{\varphi_k\varphi_{k-q}}\;Q_k Q_{k-q}^*\rho_q^* \tag{3.8}$$

ただし

$$H_{\text{field}}=\frac{1}{2}\sum_{k<k_c}(E_k^*E_k+w_k^{\,2}\,Q_k^*Q_k) \tag{3.9}$$

$$w_k^2=\frac{N\varphi_k}{m}\,k^2\equiv c^2k^2 \qquad (\,c=\sqrt{\frac{N\varphi_k}{m}}\,) \tag{3.10}$$

一方、補助条件 (3.4)は

$$(\,E_k-i\sqrt{\varphi_k}\,\rho_k^*)\cdot\Psi=0 \qquad (k<k_c) \tag{3.11}$$

となり、これは古典的には$E_k=i\sqrt{\varphi_k}\,\rho_k^*$ であることを意味する。また、E_{qn}(3.11) は、excited stated state はFeynman type であることを示す。

(3.8)式のsecond quantized formは

$$\mathscr{H}_{\text{new}}=\Sigma\frac{p^2}{2m}a_p^*a_p+H_{\text{field}}+\frac{1}{2}\sum_{k>k_c}\varphi_k\sum_p a_{p+k}^*a_p\cdot a_{p'-k}a_k$$
$$+\sum_k\sum_p\sqrt{\varphi_k}\frac{k(k-2p)}{2m}Q_k a_{p+k}^*a_p$$
$$+\Sigma\frac{k(k-q)}{2m}\sqrt{\varphi_k\varphi_{k-q}}\;Q_kQ_{k-q}^*a_{p+q}^*a_\rho$$

となる。a_p^*, a_p は通常のBoson operator である。

§4 Excitation Spectrum, その1

前節で示したように、粒子とcollective fieldとの相互作用は

$$H_{p-f}=\sum_p\sum_{k<k_c}\frac{k(k-2p)}{2m}\sqrt{\varphi_k}\,Q_k\,a_{p+k}^*a_p \tag{4.1}$$

で与えられる。この相互作用のvertexはFig.1 に示されている。Fig.1 で 実線はBose 粒子のpropagator を、波線はcallective fieldのpropagator を各々表わす。

今 collective field間の相互作用（Hamiltonian (3.13)のlast term）をneglecetしよう。このときeffectiveなfield propagatorはFig.2 に示されるDyson 方程式によつて近似的に計算される。Fig.2 のblack bubbleはtime-dependent density correlation function

$$iF_k(t-t')=\langle 0|T\{\rho_k(t)\rho_k^*(t')\}|0\rangle \qquad (4.2)$$

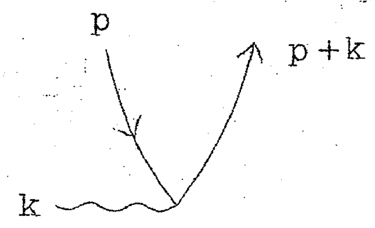

Fig.1 粒子-field相互作用

を示す。一方、free field propagator $D_q^{(0)}(\omega)$は

$$D_q^{(0)}(\omega)=\frac{1}{w^2-w_q^2+i\epsilon} \qquad (\epsilon\to 0^+) \qquad (4.3)$$

で与えられる。

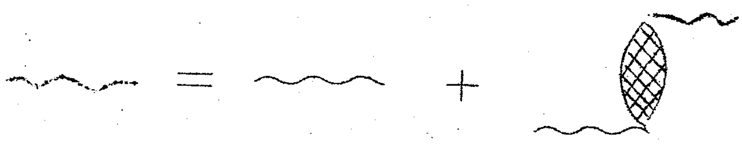

Fig.2
$D_q(\omega)$ に対するDyson方程式

Fig.2 よりeffective なfield propagator（太い波線で示す）$D_q(W)$は

$$D_q(\omega)=\frac{1}{\omega^2-\omega_q^2-\sum_p\left[\frac{q(q-2p)}{2m}\right]^2\varphi_q\cdot\frac{N(p+q)-N(\rho)}{\varepsilon_{p+q}-\varepsilon_p-\omega_q}}$$

となる。ただしN(p)は運動量pのBoson の分布関数である。

ここで、我々はblack bubble の計算はその最低次をとつた。(4.3)式の母分にBogoliubav 近似をapply すれば 我々は

$$D_q(\omega) \cong \frac{1}{\omega^2 - \omega_q^2 - \frac{q^4}{4m^2} + i\epsilon} \quad (\epsilon \to 0^+) \tag{4.4}$$

を得る。したがってexcitation spectrum は

$$\Omega_k = k \cdot \sqrt{c^2 + \frac{k^2}{4m^2}} \tag{4.5}$$

となる。これはBogoliubov speetrum である。

§5 Excitation spectrum，その2（相互作用の影響）

collective field間の相互作用はEq n (3.8) より

$$H_{f-f} = \sum_{k<k_c} \sum_{\substack{q<k_c \\ (q \neq 0)}} \frac{1}{2N} \omega_k \times \omega_{k-q} Q^*_{k-q} \rho^*_q \tag{5.1}$$

で与えられることが分る。この相互作用のvertexはFig.3 に示す通りである。この相互作用を考慮するときのDyson 方程式はFig.2 の他にFig.4 の項を附加すればよい。

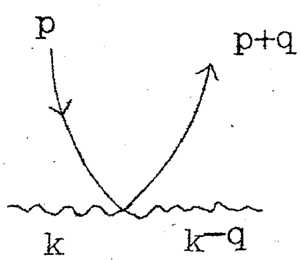

Fig.3 H_{f-f} のvertex

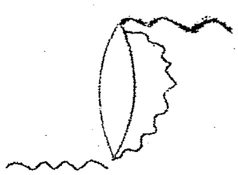

Fig. 4 Feg.2 に附加すべきdiagram

ここでも前節と同様にしてBogoliubov 近似を用いると

$$D'_q(\omega) = \left\{ \omega^2 - c^2 q^2 - \frac{\omega_q^2}{4N} \sum_{k<k_c} \frac{k^2}{m} \omega_{q-k} \cdot \frac{1}{(\omega_q - \omega_{q-k})^2 - \frac{k^4}{4m^2}} \right\}^{-1} \tag{5.2}$$

したがってexcitation spectrum は

$$\Omega'^2_k = c^2 k^2 + \frac{k^4}{4m^2} + \frac{c^2 k^2}{4N} \sum_{q<k_c} \frac{q^2 \omega_{k-q}}{m} \frac{1}{(\omega_k - \omega_{k-q})^2 - (\frac{q^2}{2m})^2} \tag{5.3}$$

となる。Eq n(4.6) の最後の項の sum を積分でおきかえ、等式

$$\int_0^{kc} d^3q \cdot f(|q|,|k-q|) = \frac{2\pi}{k}\int_0^{k} dq\, q \int_{|k-q|}^{k+q} d\chi\, \chi \cdot f(q,\chi) \tag{5.4}$$

を用いると。（$\chi \equiv |k-q|$）

① $k < \frac{1}{2}k_C$ のとき

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{c}{\rho_0}\left\{-\frac{1}{20}k^6+\frac{3}{2}k_C^3k^3-\frac{1}{2}k_C^2k^4-\frac{1}{4}k_Ck^5\right\} \tag{5.5}$$

$$+\left\{k\to\frac{1}{2}k_C \text{ で zero になる項}\right\}$$

② $k > \frac{1}{2}k_C$ のとき

$$\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{c}{\rho_0}\left\{-\frac{1}{12}k^6+\frac{9}{32}k^2\cdot k_C^4-\frac{1}{2}k^3k_C^3\right\} \tag{5.6}$$

$$+\left\{k\to k_C \text{ で zero となる項}\right\}$$

となる。すなわち、$k\sim k_C$ では spectrum は下方にひきさげられることが分る。

§6 Back Flow

Ψ_0を系の exact ground state wave tunction とするとき Feynman state は

$$\Psi_F = \rho_q \cdot \Psi_0 \tag{6.1}$$

で与えられる。一方 液体中での Excitation の運動を考りよした better wave function は

$$\Psi_{F,C} = \left\{\rho_q^* + \sum_{k\neq q} 4\pi A\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}}{k^2}\rho_k^*\rho_{k-q}^*\right\}\Psi_0 \tag{6.2}$$

と考えられ、これは Feynman-Cohen quasi-particle を表わす。この節では 適当な正準変換は collective field variables E_K は Feynman-Cohen quasi-particle を与えることを示す。

我々は §3 においてcallective field E_k は本質的に粒子のdensity fluctuation ρ_k で表わされることを示した。このことはFeynman qusi-particles はtotal Hamiltonian に正準変換 (3.6)を施すことによつて得られることを示すように思われる。

Feynman-Cohen quasi-paticles はFeynman quasi-particle のadmixture である。H_{f-f} はFeynman quasi-particlesの相互作用を表わす。そこでHamiltonian (3.8) においてH_{f-f} が消されるような正準変換を考えよう。そのような正準変換は

$$U' = e^{iS'} \tag{6.3}$$

$$S' = \sum_{k<k_c} \sum_{q(\neq 0)<k_c} \frac{1}{2N} \frac{\omega_k \cdot \omega_{k-q}}{\omega_k - \omega_{k-q} + \frac{q^2}{2m}} Q_k Q^*_{k-q} \rho^*_q \tag{6.4}$$

で与えられる。実際 この正準変換をHamiltonian (3.8) に施すと新しいHamiltonian は

$$\mathcal{H}'_{new} = e^{-iS'} \mathcal{H}_{new}\, e^{iS'}$$

$$= \sum \frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{k>k_c} \varphi_k \rho^*_k \rho_k + H_{field} + \sum \frac{k}{m} \sqrt{\varphi_k}\,(p_i - \frac{k}{2}) Q_k e^{ikx_i}$$

$$+ (\text{terms proportionol to } Q_k\, Q_{k-q}\, Q_q \text{ and } Q_k\, Q_{k-q'}\, Q_{q'}) \tag{6.5}$$

となる。

一方 補助条件 (3.11) は

$$(E_k - i\sqrt{\varphi_k} + \sum_{\substack{q<k_c \\ (q\neq 0)}} \frac{1}{2N} \frac{\omega_k\, \omega_{k-q}}{\omega_k - \omega_{k-q} + q^2/2m} Q^*_{k-q} \rho^*_q)\, \varphi = 0 \tag{6.6}$$

$$\varphi = e^{iS''} \cdot \Psi \tag{6.7}$$

となる。ここで関係式

$$\dot{E}_k \cong i\omega_k E_k = -Q^*_{-k} \tag{6.8}$$

を使用すれば、条件（6.6）は 近似的に次のように表わすことが出来る。すなわち それは

$$\left(E_k - i\sqrt{\varphi_k}\, p_k^* + \sum_{q(\neq 0)<k_c} \frac{|k|}{2m}\left(\frac{m}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi_k \varphi_{k-q}} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{\omega_k - \omega_{k-q} + \frac{q^2}{2m}}\, \rho_k^* \, \rho_{k-q}^* \right)\varphi = 0 \qquad (6.9)$$

となる。この条件はcollective field E_k は近似的にみて、Feynman-Cohen quasi-particle に対応していることを示している。このことはまた相互作用Hamiltonian H_{f-f}（Eq n(5.1)）はback-flaw に関係していることを暗示している。

§7 討論

我々はPines-Bohm theory と同じ手続で、量子化されたcollective field を導入した。これらはdensity fluctuation と密接な関係があり、Feynman quasi-particle に対応することが暗示される。field 間の相互作用 H_{f-f} はequilibrium spectrum を下方にひきさげる役割を果していることが分つた。

新しい正準変換のもとに、我々はcollective field はFeynman-Cohen quasi-particle を記述することを示した。

ここで興味ある量 k_c（cut-off wawe vector）のとり方はまだ任意であり不満足であるといえる。この値をどのように決定するかが当面の問題であり、目下考察中である。

Bogoliubov spectrum はまつたく別の方法によりHugenholtz-Pines によつても得られている。我々の使用した正準変換の方法と彼ら（及びBeliaev ）の関係は、明らかでない。これを解明することは§3 のEq n(3.4) で用いた近似と関係して興味ある問題である。

最後に、この研究にあたり 有益な討論をして下さつた阪大教養部の西山敏之教授に感謝します。

引　用　文　献

(1) 一柳，物性研究 vol. 6. no 1

(2) Drummond, Ann. Phys. **28** ('64) 478

(3) Bohm, Pines, P. R. **92** ('53) 609, 626

(4) Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **13** ('55) 467, 482

Nishiyama, 〃 **12** ('54) 265